

第6回 層構造と圧力

6.1 地球の層構造

図14の復習

集積加熱による溶融 → マグマオーシャン → 金属が地球の中心に集まる → 層構造 → マントルの固化 → 部分的な溶融と固化 → 地殻の形成

大気 太陽系組成原始大気（水素・ヘリウム） → 脱ガス大気（水蒸気・二酸化炭素）
→ 温度低下 → 雨が降って海洋が形成

固体圏 の層構造 図20

CMB 半径 3,480 km

モホ 平均深さ 16 km

流体圏 の層構造 図24

海洋 平均深さ 3.8 km

大気圏 80 km くらい

その上に

電離圏と磁気圏

Q. 圧力は地球の中心に向かうほど大きい なぜか？
(地球の重力があるから？)

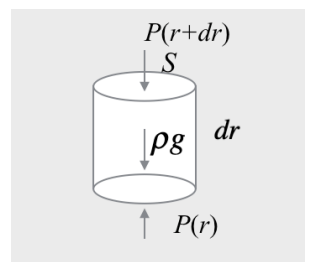
6.2 静水圧平衡

深さとともに変化する圧力は、密度と重力で決まる。

右図のような微小領域の力の釣り合いを考えると

$$P(r)S - P(r+dr)S - \rho g S dr = 0 \rightarrow \frac{dP}{dr} = -\rho g \quad (1)$$

P, ρ および g は r での圧力、密度、および重力加速度



もう少し丁寧な説明をすると。

中心から r の場所に高さ Δr の円筒を考える。円筒の断面積を S とすると

釣り合いの式は

$$P(r)S - P(r+\Delta r)S - \rho(r)g(r)S\Delta r = 0$$

$$\frac{P(r+\Delta r) - P(r)}{\Delta r} = -\rho(r)g(r)$$

となるここで Δr を小さくすると、(1) を得る。

この式の利用は以下の通りの例がある

水中の圧力

地上気圧は $P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 水の密度は $\rho_w = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ として、
下向きに深さ $z [\text{m}]$ をとると

$$\frac{dP}{dz} = \rho_w g$$

$$P = \rho_w g z + C$$

境界条件として $z = 0$ で $P = P_0$ とすると

$$P = P_0 + \rho_w g z$$

となる。

例1) 地球の大気の質量を見積もる

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g$$

を積分して、また g は高さによらず一定と仮定すると地上の気圧は

$$P = - \int_{\infty}^0 \rho g dr = g \int_0^{\infty} \rho dr$$

地球の大気の質量は

$$4\pi R_E^2 \int_0^{\infty} \rho dr = \frac{4\pi R_E^2 P}{g}$$

地上気圧は $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ である。地球の表面積は

$$4\pi R_E^2 = 5.1 \times 10^{14} [\text{m}^2]$$

従って、質量は $5.1 \times 10^{18} \text{ kg}$

参考) そのうちの CO_2 の質量は？

現在の大气の二酸化炭素濃度 (モル濃度) $400 \text{ ppm} = 4.0 \times 10^{-4}$ (1750 年は 300 ppm)

大気の平均分子量 $= 0.8 \times 28 + 0.2 \times 32 = 28.8$ 二酸化炭素の分子量 $= 44$

すると、大気中の二酸化炭素の質量は？

$$5.1 \times 10^{18} \times 4 \times 10^{-4} \times \frac{44}{28.8} = 3.1 \times 10^{15} [\text{kg}]$$

世界の人口 10^{10} 人 100ppm 下げるためには CO_2 を 10^{15} kg 削減 一人あたり $10^5 \text{ kg} = 100 \text{ トン}$

例2) 固体惑星の内部の圧力を計算してみよう

仮定: 簡単のために、密度は半径によらず一定とする

球対称（密度が半径のみの関数となる）の場合、重力加速度はその位置の半径よりも内部の質量で決まり、

$$g = \frac{GM_r}{r^2}$$

となる。

$$\rho = \text{const.}$$

$$g = \frac{GM_r}{r^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho r \quad (M_r = \frac{4\pi}{3} \rho r^3) \text{ を (1) 式に代入}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho^2 r$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho^2 r$$

$$P = -\frac{2\pi}{3} G \rho^2 r^2 + C$$

境界条件として、地表面で圧力がゼロとする、つまり

$$P = 0 \quad \text{at} \quad r = R \quad \rightarrow \quad P = \frac{2\pi}{3} G \rho^2 (R^2 - r^2)$$

実際には密度は深さとともに上昇する。Ex. コアの密度 >> 地上の鉄密度

例3）大気の鉛直構造（密度）を計算してみよう

（理想気体の状態方程式を用いる：大気は等温と仮定）

重力加速度を一定と仮定する。

気体は理想気体の状態方程式に従うと仮定する。

$$g = \text{const.}$$

$$P = \frac{\rho}{\tilde{m}} R_g T = \frac{\rho}{m} k_B T \quad (T = \text{const.})$$

$\tilde{m}$ は大気の平均分子量（分子をアボガドロ数(= 1 モル)だけ集めた質量）

m は大気分子の平均質量（1 個あたりの質量）

$$\tilde{m} = N_A m$$

$$R_g = N_A k_B$$

N_A はアボガドロ数

$pV=nRT$ との関係

$$pV = nR_g T$$

$$p = \frac{n}{V} R_g T = \frac{M/\tilde{m}}{V} R_g T = \frac{\rho}{\tilde{m}} R_g T$$

M は体積Vの質量

(1) に代入して

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{\tilde{m}} R_g T \right) = -g\rho$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{g\tilde{m}}{R_g T}$$

$z = r - R$ を導入して積分すると

$$\ln \rho = -\frac{g\tilde{m}}{R_g T} z + C$$

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{g\tilde{m}}{RT} z\right) = \rho_0 e^{-z/h}$$

地表 ($z=0$) における密度を ρ_0 とする, h はスケールハイト
密度が半分になる高さは、約 5 km だと思うが、計算してみる。

$$h = \frac{RT}{g\tilde{m}}$$